TEMAT 1: WYBRANE ROZKŁADY TYPU SKOKOWEGO – ROZKŁAD DWUMIANOWY (BERNOULLIEGO)

Zadanie 1-1

Prawdopodobieństwo nieprzekroczenia przez pewien zakład pracy dobowego limitu zużycia energii elektrycznej (bez konieczności wyłączenia niektórych maszyn) wynosi $p = 0.8$. Niech K oznacza możliwą liczbę dni w 5-dniowym tygodniu pracy, w które nie nastąpiło przekroczenie limitu (przy założeniu, że wyłączenie urządzeń nie było konieczne). Wyznaczyć:

a) funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej K i jej histogram,
b) dystrybuantę i jej wykres,
c) prawdopodobieństwo, że co najmniej w trzech dniach limit nie zostanie przekroczony,
d) najbardziej prawdopodobną liczbę dni, w których limit nie zostanie przekroczony i prawdopodobieństwo takiej liczby dni,
e) taką wartość prawdopodobieństwa p, aby najbardziej prawdopodobna liczba dni, w których limit nie zostanie przekroczony, wynosiła 4 albo 5 dni,
f) taką wartość prawdopodobieństwa p, aby najbardziej prawdopodobna liczba dni, w których limit nie zostanie przekroczony, wynosiła 5 dni,
g) wartość oczekiwaną (przeciętną) i wariancję zmiennej losowej K.

Zadanie 1-2

Załóżmy, że każde z pytań egzaminacyjnych jest napisane na oddzielnej kartce. Student losuje jedno pytanie, po czym oddaje kartkę. Nauczyciel egzaminuje czterech studentów. Każdy ze zdających zna odpowiedź na 50% pytań egzaminacyjnych. Tak więc prawdopodobieństwo, że student odpowie na pytanie wynosi $p = 0.5$. Niech K oznacza liczbę studentów, którzy umieli odpowiedzieć na wylosowane pytanie. Wyznaczyć:

a) funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej K i jej histogram,
b) dystrybuantę i jej wykres,
c) prawdopodobieństwo, że co najmniej jeden student odpowiedział na zadane pytanie,
d) najbardziej prawdopodobną liczbę studentów, którzy umieli odpowiedzieć na zadane pytanie oraz prawdopodobieństwo takiej liczby studentów,
e) taką wartość prawdopodobieństwa p, aby najbardziej prawdopodobna liczba studentów, którzy umieli odpowiedzieć na pytanie, wynosiła 3,
f) taką wartość prawdopodobieństwa p, aby najbardziej prawdopodobna liczba studentów, którzy umieli odpowiedzieć na pytanie, wynosiła 1 lub 2,
g) wartość oczekiwaną (przeciętną) i wariancję zmiennej losowej K.

Zadanie 1-3

Po pewnej trasie jeżdżą trzy autobusy. Awarie poszczególnych autobusów są zdarzeniami niezależnymi i prawdopodobieństwo awarii każdego z nich w określonym przedziale czasu jest równe 0.1 Niech K oznacza liczbę autobusów, które w ciągu rozważanego czasu uległy awarii (autobus, który uległ awarii nie jest naprawiany). Wyznaczyć:

a) funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej K i jej histogram,
b) dystrybuantę i jej wykres,
c) prawdopodobieństwo tego, że co najmniej dwa autobusy uległy awarii,
d) najbardziej prawdopodobną liczbę autobusów, które uległy awarii oraz prawdopodobieństwo takiej liczby autobusów,
e) taką wartość prawdopodobieństwa p, aby najbardziej prawdopodobna liczba autobusów, które uległy awarii, wynosiła 2,
f) taką wartość prawdopodobieństwa p, aby najbardziej prawdopodobna liczba autobusów, które uległy awarii, wynosiła 2 lub 3,
g) wartość oczekiwaną (przeciętną) i wariancję zmiennej losowej K.

TEMAT 2: WYBRANE ROZKŁADY TYPU CIĄGŁEGO – ROZKŁAD WYKŁADNICZY

Zadanie 2-1

Czas (w minutach) między kolejnymi zgłoszeniami abonentów w pewnej centrali telefonicznej jest zmienną losową o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda = 2$. Obliczyć średni czas między kolejnymi zgłoszeniami oraz prawdopodobieństwo tego, że przed upływem 3 minut nastąpi zgłoszenie.

TEMAT 3: WYBRANE ROZKŁADY TYPU CIĄGŁEGO – ROZKŁAD NORMALNY

Zadanie 3-1

Automat produkuje odważniki 10-gramowe. Błędy pomiarów masy tych odważników mają rozkład normalny o wartości oczekiwanej (przeciętnej) $\mu = 0$ [g] i odchyleniu standardowym $\sigma = 0.01$ [g]. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że pomiar masy będzie przeprowadzony z błędem nie przekraczającym 0.02 [g]. Naszkicować kształt krzywej funkcji gęstości rozkładu $N(\mu,\sigma)$ zaznaczając na wykresie odpowiednie wartości argumentów odpowiadające dla $\mu \pm 3\sigma$ oraz wartość maksymalną funkcji gęstości.

Zadanie 3-2

Niech zmienna losowa X ma rozkład $\mathrm{N}(\mu,\sigma)$. Obliczyć $P(|\mathrm{X} - \mu| < k\sigma)$ dla a) $k = 1.96$, b) $k = 2.58$. Podać interpretację graficzną otrzymanych wyników.

Wykorzystując rozwiązanie z powyższego zadania sprawdź regułę trzech sigm, która mówi, że około 68,3% pola pod wykresem krzywej gęstości rozkładu normalnego znajduje się w odległości jednego odchylenia standardowego od wartości średniej, około 95,5% w odległości dwóch odchyleń standardowych oraz około 99,7% w odległości trzech sigm.

Zadanie 3-3

Waga mężczyzn ma rozkład normalny o parametrach $\mu = 72$ kg, $\sigma = 8.1$ kg. Obliczyć prawdopodobieństwo, że losowo wybrany mężczyzna będzie miał wagę:

a) poniżej 68 kg;
b) od 68 kg do 74 kg;
c) powyżej 80 kg.

Naszkicować kształt krzywej funkcji gęstości rozkładu $N(\mu,\sigma)$ zaznaczając na wykresie odpowiednie wartości argumentów odpowiadające dla $\mu \pm 3\sigma$ oraz wartość maksymalną funkcji gęstości.

Zadanie 3-4

Wytrzymałość pewnego materiału budowlanego (w $\mathrm{N/cm^2}$) jest zmienną losową o rozkładzie $N(20.8; 0.4)$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wytrzymałość materiału budowlanego:

a) przekroczy 22 $\mathrm{N/cm^2}$;
b) nie jest większa niż norma techniczna wynosząca 20 $\mathrm{N/cm^2}$.

Naszkicować kształt krzywej funkcji gęstości rozkładu $N(\mu,\sigma)$ zaznaczając na wykresie odpowiednie wartości argumentów odpowiadające dla $\mu \pm 3\sigma$ oraz wartość maksymalną funkcji gęstości.

Zadanie 3-5

Opóźnienie przyjazdu pociągu do stacji jest zmienną losową o rozkładzie normalnym N(15 min.; 13 min.). Obliczyć prawdopodobieństwo, że:

a) pociąg, który miał przyjechać o godz. 22.00 przyjedzie między godz. 22.05 a godz. 22.10;
b) ten sam pociąg przyjedzie po godz. 22.20.

Naszkicować kształt krzywej funkcji gęstości rozkładu $N(\mu,\sigma)$ zaznaczając na wykresie odpowiednie wartości argumentów odpowiadające dla $\mu \pm 3\sigma$ oraz wartość maksymalną funkcji gęstości.

ODPOWIEDZI DO WYBRANYCH ZADAŃ

TEMAT 1: WYBRANE ROZKŁADY TYPU SKOKOWEGO – ROZKŁAD DWUMIANOWY (BERNOULLIEGO)

Zadanie 1-1

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

A – zdarzenie: w ciągu doby nie został przekroczony limit zużycia energii elektrycznej

K – zmienna losowa: liczba sukcesów w 5 doświadczeniach Bernoulliego (tj. liczbę dni, w przypadku których nie został wyłączony prąd)

Zauważmy, że obserwujemy $n = 5$ razy zajście tego samego zdarzenia A z prawdopodobieństwem $p = 0.8$ (takim samym w przypadku każdej z obserwacji). Obserwacje te są doświadczeniami niezależnymi. Zmienna losowa K ma więc rozkład Bernoulliego z parametrami $n = 5$ oraz $p = 0.8$.

Obliczamy:

a) $p_0 \equiv P(K = 0) = 0.00032$; $p_1 \equiv P(K = 1) = 0.0064$; $p_2 \equiv P(K = 2) = 0.0512$;
$p_3 \equiv P(K = 3) = 0.2048$; $p_4 \equiv P(K = 4) = 0.4096$; $p_5 \equiv P(K = 5) = 0.32768$;

k (ozn. x_i)	0	1	2	3	4	5
p_k (ozn. p_i)	0.00032	0.0064	0.0064	0.2048	0.4096	0.32768

b)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0.00032, & 0 < x \le 1 \\ 0.00672, & 1 < x \le 2 \\ 0.05792, & 2 < x \le 3 \\ 0.26272, & 3 < x \le 4 \\ 0.67232, & 4 < x \le 5 \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

c) $P(K \ge 3) \approx 0.94$

d) $k_0 = 4$, $P(K = 3) = 0.4096$

e) $p = 5/6$, $k_1 = 4$, $k_2 = 5$

f) $5/6 < p < 1$, $k_0 = 5$

g) $E(K) = 4$, $D^2(K) = 0.8$

Zadanie 1-2

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

A – zdarzenie: student odpowie na zadane pytanie egzaminacyjne

K – zmienna losowa: liczba studentów, którzy umieli odpowiedzieć na zadane pytanie egzaminacyjne

Zmienna losowa K ma więc rozkład Bernoulliego z parametrami $n = 4$ oraz $p = 0.5$.

Obliczamy:

a) $p_0 \equiv P(K = 0) = 0.0625$; $p_1 \equiv P(K = 1) = 0.25$; $p_2 \equiv P(K = 2) = 0.375$; $p_3 \equiv P(K = 3) = 0.25$; $p_4 \equiv P(K = 4) = 0.0625$

k (ozn. x_i)	0	1	2	3	4
p_k (ozn. p_i)	0.0625	0.25	0.375	0.25	0.0625

b)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0.0625, & 0 < x \le 1 \\ 0.3125, & 1 < x \le 2 \\ 0.6875, & 2 < x \le 3 \\ 0.9375, & 3 < x \le 4 \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

c) $P(K \ge 1) = 0.9375$

d) $k_0 = 2$, $P(K = 2) = 0.375$

e) $0.6 < p < 0.8$, $k_0 = 3$

f) $p = 0.4$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$

g) $E(K) = 2$, $D^2(K) = 1$

Zadanie 1-3

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

A – zdarzenie: autobus uległ awarii

K – zmienna losowa: liczba autobusów, które uległy awarii

Zmienna losowa K ma więc rozkład Bernoulliego z parametrami $n = 3$ oraz $p = 0.1$.

Obliczamy:

a) $p_0 \equiv \mathrm{P}(K = 0) = 0.729$; $p_1 \equiv \mathrm{P}(K = 1) = 0.243$; $p_2 \equiv \mathrm{P}(K = 2) = 0.027$; $p_3 \equiv \mathrm{P}(K = 3) = 0.001$

k (ozn. x_i)	0	1	2	3
p_k (ozn. p_i)	0.729	0.243	0.027	0.001

b)

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 0.729, & 0 < x \le 1 \\ 0.972, & 1 < x \le 2 \\ 0.999, & 2 < x \le 3 \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

c) $\mathrm{P}(K \ge 2) = 0.028$

d) $k_0 = 0$, $\mathrm{P}(K = 2) = 0.729$

e) $0.5 < p < 0.75$, $k_0 = 2$

f) $p = 0.75$, $k_1 = 2$, $k_2 = 3$

g) $\mathrm{E}(K) = 0.3$, $\mathrm{D}^2(K) = 0.27$

TEMAT 2: WYBRANE ROZKŁADY TYPU CIĄGŁEGO – ROZKŁAD WYKŁADNICZY

Zadanie 2-1

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

X – zmienna losowa (o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda = 2$): czas między kolejnymi zgłoszeniami abonentów w pewnej centrali telefonicznej.

Obliczamy:

$\mathrm{E}(X) = 2$ [min], $\mathrm{P}(X < 3) \approx 0.7769$.

TEMAT 3: WYBRANE ROZKŁADY TYPU CIĄGŁEGO – ROZKŁAD NORMALNY

Zadanie 3-1

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

X – zmienna losowa (o rozkładzie normalnym z parametrami $\mu = 0$ [g] oraz $\sigma = 0.01$ [g]): błąd przeprowadzonego pomiaru masy.

Obliczamy:

$\mathrm{P}(|X| < 0.02) \approx 0.954$

Zadanie 3-2

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

X – zmienna losowa (o rozkładzie normalnym z parametrami μ oraz σ).

Obliczamy:

$\mathrm{P}(|X - \mu| < k\sigma) \approx 0.95$, gdy $k = 1.96$; $\mathrm{P}(|X - \mu| < k\sigma) \approx 0.99$, gdy $k = 2.58$

oraz

$\mathrm{P}(|X - \mu| < \sigma) \approx 0.683$; $\mathrm{P}(|X - \mu| < 2\sigma) \approx 0.9545$; $\mathrm{P}(|X - \mu| < 3\sigma) \approx 0.9973$.

Zadanie 3-3

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

X – zmienna losowa (o rozkładzie normalnym z parametrami $\mu = 72$ [kg] oraz $\sigma = 8.1$ [g]): waga mężczyzny.

Obliczamy:

a) $\mathrm{P}(X < 68) \approx 0.3121$;
b) $\mathrm{P}(68 \le X \le 74) \approx 0.2866$;
c) $\mathrm{P}(X > 80) \approx 0.1611$.

Zadanie 3-4

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

X – zmienna losowa (o rozkładzie normalnym z parametrami μ = 20.8 [N/cm^2] oraz σ = 0.4 [N/cm^2]): wytrzymałość materiału budowlanego.

Obliczamy:

a) $P(X > 22) \approx 0.00135$;
b) $P(X \leq 20) \approx 0.02275$.

Zadanie 3-5

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

X – zmienna losowa (o rozkładzie normalnym z parametrami μ = 15 [min.] oraz σ = 13 [min.]): opóźnienie przyjazdu pociągu na stację.

Obliczamy:

a) $P(5 \leq X \leq 10) \approx 0.1314$;
b) $P(X > 20) \approx 0.352$.