TEMAT 1: PRAWDOPODOBIEŃSTWO WARUNKOWE I NIEZALEŻNOŚĆ ZDARZEŃ

Zadanie 1-1

W magazynie są elementy pochodzące z dwóch różnych fabryk, nazwijmy te fabryki I i II. Elementy są klasyfikowane jako dobre i wadliwe.
Oznaczmy przez:
- A zdarzenie: wybrany w sposób losowy element jest dobry,
- $\overline{A}$ zdarzenie: wybrany w sposób losowy element jest wadliwy,
- B zdarzenie: wybrany w sposób losowy element pochodzi z fabryki I,
- $\overline{B}$ zdarzenie: wybrany w sposób losowy element pochodzi z fabryki II.

Liczby elementów odpowiadające poszczególnym zdarzeniom podane są w tabeli:

	A	$\overline{A}$	Razem
B	a	b	a + b
$\overline{B}$	c	d	c + d
Razem	a + c	b + d	a + b + c + d

Obliczyć prawdopodobieństwa:

a) $P(A)$, $P(\overline{A})$, $P(B)$, $P(\overline{B})$, $P(A\cap B)$, $P(\overline{A}\cap B)$, $P(A\cap \overline{B})$, $P(\overline{A}\cap \overline{B})$,

b) $P(A\,|\,B), P(\overline{A}\,|\,B), P(A\,|\,\overline{B}), P(\overline{A}\,|\,\overline{B})$.

Zadanie 1-2

W ciągu 1000 dni przeprowadzono obserwacje meteorologiczne dotyczące siły wiatru i ciśnienia atmosferycznego.
Oznaczmy przez:
- A zdarzenie: siła wiatru < 5 m/s,
- $\overline{A}$ zdarzenie: siła wiatru ≥ 5 m/s,
- B zdarzenie: ciśnienie atmosferyczne < 1020 milibarów,
- $\overline{B}$ zdarzenie: ciśnienie atmosferyczne ≥ 1020 milibarów.

Zaobserwowano następujące liczby zdarzeń:

	A	$\overline{A}$	Razem
B	400	100	500
$\overline{B}$	200	300	500
Razem	600	400	1000

Przyjmując częstości atmosferyczne jako prawdopodobieństwa obliczyć:

a) $P(A)$, $P(\overline{A})$, $P(B)$, $P(\overline{B})$, $P(A\cap B)$, $P(\overline{A}\cap B)$, $P(A\cap \overline{B})$, $P(\overline{A}\cap \overline{B})$,

b) $P(A\,|\,B), P(\overline{A}\,|\,B), P(A\,|\,\overline{B}), P(\overline{A}\,|\,\overline{B})$,

oraz odpowiedzieć na pytanie czy zdarzenia A i B są niezależne.

Zadanie 1-3

W partii rur liczącej 1000 sztuk jest 200 rur stożkowych, 150 eliptycznych, 50 eliptycznych i stożkowych, 600 rur nie ma wad (rury walcowe).
Oznaczmy przez:
- S zdarzenie: wybrana w sposób losowy rura jest stożkowa,
- L zdarzenie: wybrana w sposób losowy rura jest eliptyczna.

Obliczyć prawdopodobieństwa: $P(S)$, $P(L)$, $P(S\cap L)$, $P(S\,|\,L)$. Czy zdarzenia S oraz L są niezależne?

Zadanie 1-4

Prawdopodobieństwem przekazania sygnału przez jeden przekaźnik jest $p = 0.9$. Działają niezależnie dwa przekaźniki (tzn. działanie jednego z nich nie ma wpływu na zadziałanie drugiego). Obliczyć prawdopodobieństwo przekazania sygnału:
- przy połączeniu szeregowym dwóch przekaźników (muszą działać oba przekaźniki),
- przy połączeniu równoległym (wystarczy, aby jeden z przekaźników działał).

Oznaczmy przez:
- A zdarzenie: sygnał został przekazany przez przekaźnik pierwszy,
- B zdarzenie: sygnał został przekazany przez przekaźnik drugi.

TEMAT 2: TWIERDZENIE O PRAWDOPODOBIEŃSTWIE ZUPEŁNYM (CAŁKOWITYM), TWIERDZENIE BAYESA

Zadanie 2-1

Na pierwszym roku studiów pewnego wydziału są słuchacze pochodzący z trzech grup:
- grupa 1 - duże miasta,
- grupa 2 - małe i średnie miasta,
- grupa 3 - wieś.

Liczebności słuchaczy z odpowiednich grup są równe odpowiednio: 50, 40, 30.
Prawdopodobieństwa terminowego ukończenia studiów dla słuchaczy odpowiednich grup są równe odpowiednio: 0.3, 0.4, 0.5. Z rozważanego zespołu 120 osób wybrano w losowy sposób studenta.

Obliczyć:

a) prawdopodobieństwo P_a tego, że pochodzi on z grupy 1,

b) prawdopodobieństwo P_b tego, że ukończy on terminowo studia,

c) prawdopodobieństwo warunkowe P_c tego, że pochodzi on z grupy 1, jeżeli stwierdzono (tzn. przy warunku), że ukończył on terminowo studia,

d) prawdopodobieństwo warunkowe P_d tego, że pochodzi z grupy 2, jeżeli stwierdzono, że nie ukończył on studiów terminowo.

Zadanie 2-2

W magazynie fabryki są amperomierze pochodzące z trzech taśm produkcyjnych, przy czym liczby amperomierzy z każdej taśmy są takie same.

Wiadomo, że dostawy z pierwszej taśmy zawierają 0.5% braków, z drugiej – 0.7% braków, z trzeciej – 1% braków. Zbadać dwie sytuacje:

a) wybrany w sposób losowy amperomierz okazał się brakiem. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że został on wyprodukowany na taśmie drugiej,

b) wybrany w sposób losowy amperomierz okazał się dobry. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że został on wyprodukowany na taśmie trzeciej.

Zadanie 2-3

Wiadomo, że 5% studentów (grupa 1) umie odpowiedzieć na wszystkie pytania egzaminacyjne, 30% (grupa 2) umie odpowiedzieć na 70% pytań, 40% (grupa 3) umie odpowiedzieć na 60% pytań, a 25% (grupa 4) umie odpowiedzieć tylko na 50% pytań.

Z zespołu tego wybrano w sposób losowy studenta.

Obliczyć:

a) prawdopodobieństwo tego, że wybrany student odpowie na zadane pytanie,

b) prawdopodobieństwo warunkowe tego, że należy on do grupy 2, jeżeli stwierdzono (tzn. przy warunku), że odpowiedział on na zadane pytanie.

ODPOWIEDZI DO WYBRANYCH ZADAŃ

TEMAT 1: PRAWDOPODOBIEŃSTWO WARUNKOWE I NIEZALEŻNOŚĆ ZDARZEŃ

Zadanie 1-1

Obliczamy:

a) $P(A) = (a + c)/(a + b + c + d)$, $P(\bar{A}) = (b + d)/(a + b + c + d)$, $P(B) = (a + b)/(a + b + c + d)$, $P(\bar{B}) = (c + d)/(a + b + c + d)$

$P(A \cap B) = a/(a + b + c + d)$, $P(\bar{A} \cap B) = b/(a + b + c + d)$, $P(A \cap \bar{B}) = c/(a + b + c + d)$, $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = d/(a + b + c + d)$

b) $P(A|B) = a/(a + b)$, $P(\bar{A}|B) = b/(a + b)$, $P(A|\bar{B}) = c/(c + d)$, $P(\bar{A}|\bar{B}) = d/(c + d)$

Zadanie 1-2

Obliczamy:

a) $P(A) = 3/5$, $P(\bar{A}) = 2/5$, $P(B) = 1/2$, $P(\bar{B}) = 1/2$

$P(A \cap B) = 2/5$, $P(\bar{A} \cap B) = 1/10$, $P(A \cap \bar{B}) = 1/5$, $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 3/10$

b) $P(A|B) = 4/5$, $P(\bar{A}|B) = 1/5$, $P(A|\bar{B}) = 2/5$, $P(\bar{A}|\bar{B}) = 3/5$

Odp. Zdarzenia są zależne.

Zadanie 1-3

Obliczamy:

$P(S) = 1/4$, $P(L) = 1/5$, $P(S \cap L) = 1/20$, $P(S|L) = 1/4$

Odp. Zdarzenia są niezależne.

Zadanie 1-4

Obliczamy:

- przy połączeniu szeregowym sygnał zostanie przekazany, jeżeli nastąpi zdarzenie A oraz zdarzenie B; stąd rozważamy iloczyn tych zdarzeń; mamy $P(A \cap B) = 0.81$
- przy połączeniu równoległym sygnał zostanie przekazany, jeżeli nastąpi zdarzenie A lub zdarzenie B; stąd rozważamy sumę tych zdarzeń; mamy $P(A \cup B) = 0.99$

TEMAT 2: TWIERDZENIE O PRAWDOPODOBIEŃSTWIE ZUPEŁNYM (CAŁKOWITYM), TWIERDZENIE BAYESA

Zadanie 2-1

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

A_k, $k = 1,2,3$, zdarzenie: student pochodzi z grupy k,
B zdarzenie: student kończy terminowo studia,
C zdarzenie: student nie ukończy terminowo studiów.

Obliczamy:

$P(A_1) = 5/12$, $P(A_2) = 4/12$, $P(A_3) = 3/12$

Z założeń zadania mamy:

$P(B|A_1) = 0.3$, $P(B|A_2) = 0.4$, $P(B|A_3) = 0.5$ oraz $P(C|A_1) = 0.7$, $P(C|A_2) = 0.6$, $P(C|A_3) = 0.5$

Z twierdzenia o prawdopodobieństwie zupełnym oraz z twierdzenia Bayesa dostajemy:

$P(B) \approx 0.38$, $P(A_1|B) \approx 0.33$, $P(A_2|B) \approx 0.35$, $P(A_3|B) \approx 0.32$
$P(C) \approx 0.62$, $P(A_1|C) \approx 0.47$, $P(A_2|C) \approx 0.32$, $P(A_3|C) \approx 0.2$

Odp. $P_a = P(A_1) = 5/12$, $P_b = P(B) \approx 0.38$, $P_c = P(A_1|B) \approx 0.33$, $P_d = P(A_2|C) \approx 0.32$

Zadanie 2-2

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

A_k, $k = 1,2,3$, zdarzenie: losowo wybrany amperomierz pochodzi z taśmy k,
B zdarzenie: amperomierz jest brakiem,
C zdarzenie: amperomierz jest dobry.

Obliczamy:

$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = 1/3$

Z założeń zadania mamy:

$P(B|A_1) = 0.005$, $P(B|A_2) = 0.007$, $P(B|A_3) = 0.01$ oraz $P(C|A_1) = 0.995$, $P(C|A_2) = 0.993$, $P(C|A_3) = 0.99$

Z twierdzenia o prawdopodobieństwie zupełnym oraz z twierdzenia Bayesa dostajemy:

$P(B) \approx 0.0073$, $P(A_1|B) \approx 0.227$, $P(A_2|B) \approx 0.318$, $P(A_3|B) \approx 0.454$
$P(C) \approx 0.9927$, $P(A_1|C) \approx 0.334$, $P(A_2|C) \approx 0.333$, $P(A_3|C) \approx 0.332$

Odp. a) $P(A_2|B) \approx 0.318$, b) $P(A_3|C) \approx 0.332$

Zadanie 2-3

Przyjmujemy następujące oznaczenia:

A_k, k = 1,2,3, zdarzenie: student pochodzi z grupy k,

B zdarzenie: student odpowie na zadane pytanie.

Obliczamy:

$P(A_1) = 1/20$, $P(A_2) = 3/10$, $P(A_3) = 2/5$, $P(A_4) = 1/4$,

Z założeń zadania mamy:

$P(B|A_1) = 1$, $P(B|A_2) = 0.7$, $P(B|A_3) = 0.6$, $P(B|A_4) = 0.5$

Z twierdzenia o prawdopodobieństwie zupełnym oraz z twierdzenia Bayesa dostajemy:

$P(B) = 0.625$, $P(A_1|B) = 0.08$, $P(A_2|B) = 0.336$, $P(A_3|B) = 0.384$, $P(A_4|B) = 0.2$

Odp. a) $P(B) = 0.625$, b) $P(A_2|B) = 0.336$